The Atiyah-Jänich theorem and its twisted refinement

An introduction to category theory for freshmen

Byungdo Park
Korea Institute for Advanced Study (KIAS)

Incheon National University
13 March 2018

Mathematics colloquium?

I recommend you to keep asking the following question.

Question

Why is it that the mathematics the speaker is discussing **good** mathematics?

† in this talk: Not self-contained, too advanced, or will not be explained with care.

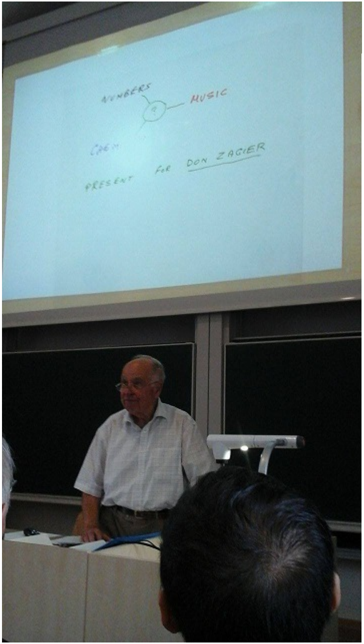
Bonn 1964–1965

Dieser Index ist ebenfalls eine Homotopieinvariante. (Für die Definition von $K(X)$ s. [2].) Es sei Λ_2 der Raum der Fredholm-Operatoren in $H \oplus H$. Wir fassen Λ vermöge $B \to B \oplus \mathrm{Id}$ als einen Teilraum von Λ_2 auf und bezeichnen mit $[X, \Lambda, \Lambda_2]$ die Menge der Homotopieklassen in Λ_2 von Abbildungen von X in Λ. Wir definieren in Λ zwei Verknüpfungen, die $[X, \Lambda, \Lambda_2]$ zu einem kommutativen Ring machen. $[\ldots, \Lambda, \Lambda_2]$ ist dann ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der kommutativen Ringe. Wir beweisen (Satz 2): Der Index Δ definiert einen Isomorphismus der Funktoren $[\ldots, \Lambda, \Lambda_2]$ und K. Nachdem nun N. KUIPER [7] die Zusammenziehbarkeit der unitären Gruppe des Hilbertraumes bewiesen hat, kann man hieraus sogar folgern, daß Δ einen Isomorphismus zwischen $[\ldots, \Lambda]$ und K herstellt.

Bisher war von Fredholm-Operatoren im komplexen Hilbertraum die Rede. In der Tat behandeln wir zugleich den Fall reeller und (was die additive Struktur angeht) quaternionaler Fredholm-Operatoren und erhalten entsprechende Ergebnisse.

Auf ganz andere Weise bewies kürzlich R. PALAIS (z. T. nach Vorschlägen von M. ATIYAH), daß Λ und $\mathbf{Z} \times BU$ homotopieäquivalent sind. BU ist dabei der klassifizierende Raum der unendlichen unitären Gruppe. R. PALAIS gab den Beweis in einem Vortrag in Bonn (Juni 1964) an. Es sei A die Banachalgebra der stetigen linearen Operatoren von H in sich, K das abgeschlossene Ideal der kompakten Operatoren, $p: A \to A/K =: \mathfrak{A}$ die Projektion. $\mathfrak{A}^*$ sei die Gruppe der Einheiten in $\mathfrak{A}$, dann ist Λ gerade $p^{-1}(\mathfrak{A}^*)$, und p induziert daher eine surjektive Abbildung $\tilde{p}: \Lambda \to \mathfrak{A}^*$. Nach Resultaten von E. MICHAEL [9] ist $\tilde{p}: \Lambda \to \mathfrak{A}^*$ eine Serre-Faserung, und da die Fasern zusammenziehbar sind (K ist konvex!), induziert $\tilde{p}$ Isomorphismen in allen Homotopiegruppen. Daraus folgt in unserem Falle sogar, daß $\tilde{p}$ eine Homotopieäquivalenz ist. Denn wie J. MILNOR beweist [10a, Lemma 4], wird jede offene Teilmenge eines Banachraumes durch einen CW-Komplex dominiert, Λ und $\mathfrak{A}^*$ sind offene Teilmengen von Banachräumen, nach WHITEHEAD [14] ist daher $\tilde{p}$ eine Homotopieäquivalenz.

Bonn 1964–1965



JÄNICH, K.
Math. Annalen 161, 129—142 (1965)

Vektorraumbündel und der Raum der Fredholm-Operatoren

Von

KLAUS JÄNICH in Bonn

Einleitung

Unter einem Fredholm-Operator in einem separablen komplexen Hilbertraum H verstehen wir einen stetigen linearen Operator, dessen Bild abgeschlossen ist und dessen Kern und Cokern von endlicher Dimension sind. (Vgl. [6].) Die Differenz dieser beiden Dimensionen heißt der Index des Operators. Die Topologie im Raum Λ der Fredholm-Operatoren werde durch die Operator-Norm gegeben.

Der Index ist eine Homotopieinvariante der Abbildungen des einpunktigen Raumes in Λ, und zwar eine charakterisierende : Zwei Punkte in Λ haben genau dann denselben Index, wenn sie durch einen stetigen Weg in Λ verbindbar sind.

Eine interessante Klasse von Beispielen von Fredholm-Operatoren bilden die linearen elliptischen Differentialoperatoren in Vektorraumbündeln über kompakten Mannigfaltigkeiten. Nachdem es durch die Index-Formel von ATIYAH-SINGER [3] möglich geworden ist, die Indices solcher Operatoren mittels gewisser Cohomologieklassen zu berechnen, hat sich bei vielen numerischen Daten, die man in der algebraischen Topologie Vektorraumbündeln und Mannigfaltigkeiten zuordnet, herausgestellt, daß sie sich als Indices gewisser Differentialoperatoren realisieren lassen, die den Mannigfaltigkeiten bzw. Bündeln in kanonischer Weise zugeordnet sind (vgl. [3], [8]).

Wir betrachten nun stetige Abbildungen eines kompakten topologischen Raumes X in Λ. Solch eine Abbildung kann z. B. durch eine Schar elliptischer Differentialoperatoren gegeben sein, die in geeigneter Weise auf den Fasern einer gefaserten Mannigfaltigkeit definiert sind. Da der Index auf jeder Zu-

Outline

Categories

Definition

A **category** $\mathcal{C}$ is a datum consisting of the following data:

(1) $\mathcal{C}$ the totality of *objects*

(2) For any $x, y \in \mathcal{C}$ the totality of *morphisms* (or "arrows") $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$

satisfying

- There is a *composition* between morphisms:

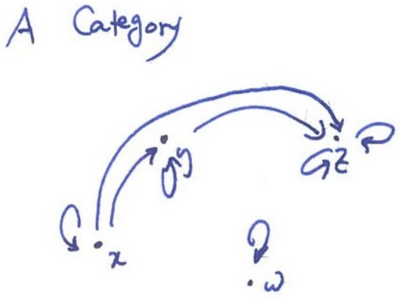
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) &\xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

- The composition is associative:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad \text{for all composable triples } (f, g, h).$$

- There is an *identity morphism* $\mathbf{1}_x$ for every $x \in \mathcal{C}$ satisfying $f \circ \mathbf{1}_x = f = \mathbf{1}_y \circ f, \quad$ for all $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$.

Categories



Exercise

What is $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$? What about $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, z)$?

Remark

† Objects $\mathcal{C}$ and morphisms $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ do not have to form a set. If both are sets, we say the category $\mathcal{C}$ is **small**. If $\mathcal{C}$ is enriched over the category **Sets**, it is said to be **locally small**.

Examples of categories

(1) Any set is a category.

Example

We verify $\mathbf{n} = \{1, 2, \cdots, n\}$ is a category.

Objects: $\mathbf{n}$ itself.
Morphisms: $\mathrm{Hom}(i, j) = \phi$ for all $i \neq j \in \mathbf{n}$ and $\mathrm{Hom}(i, i) = \mathbf{1}_i$ for all $i \in \mathbf{n}$.

(2) **Sets** the category of all sets

Objects: All sets
Morphisms: $\mathrm{Hom}(A, B) =$ all functions from A to B, for any sets A and B.

Interlude: Some algebraic structures

Definition

A **commutative monoid** is a set M endowed with an addition $+$ which is commutative, associative, and has the identity $0 \in M$

Example

$(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ the set of all nonnegative integers.

Definition

An **abelian group** is a commutative monoid $(M, +)$ satisfying that, for every $x \in M$ there is $-x \in M$ so that $x + (-x) = 0$ holds.

Example

$(\mathbb{Z}, +)$ the set of all integers with addition.

Definition

A **morphism** of commutative monoids from $(M, +_M)$ to $(N, +_N)$ is a function $f : M \to N$ satisfying that

$$f(m_1 +_M m_2) = f(m_1) +_N f(m_2) \quad \text{for all } m_1, m_2 \in M.$$

Examples of categories (continued)

(3) **CMon** the category of all commutative monoids

Objects: All commutative monoids

Morphisms: $\mathrm{Hom}(M, N) =$ all momorphisms of commutative monoids from M to N, for any $M, N \in \mathbf{CMon}$.

(4) **Ab** the category of all abelian groups

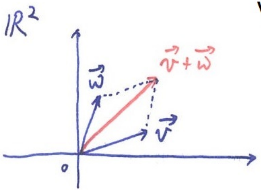
Objects: All abelian groups

Morphisms: $\mathrm{Hom}(A, B) =$ all morphisms of abelian group from A to B, for any $A, B \in \mathbf{Ab}$.

Interlude: Real vector spaces

$$\mathbb{R}^n := \{(v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) : v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Vector sum



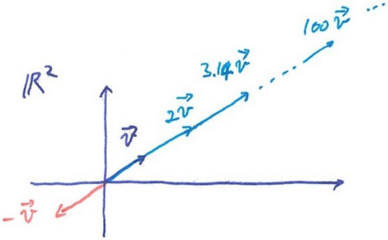
$\mathbb{R}^n$

$\vec{v} = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{w} = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{v}+\vec{w} = (v_1+w_1, \cdots, v_n+w_n) \in \mathbb{R}^n$

Scalar multiplication



$\mathbb{R}^n$

$\vec{v} = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

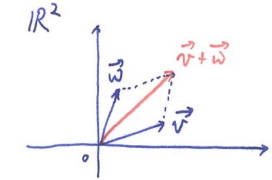
$c \in \mathbb{R}$

$c\vec{v} = (cv_1, \cdots, cv_n) \in \mathbb{R}^n$

Interlude: Complex vector spaces

$$\mathbb{C}^n := \{(v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) : v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{C}\}.$$

Vector sum



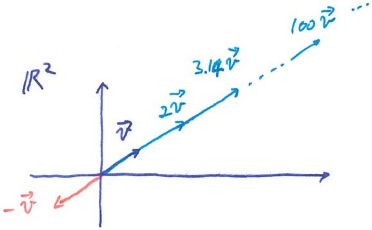
$\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$

$\vec{v} = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$

$\vec{w} = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$

$\vec{v}+\vec{w} = (v_1+w_1, \cdots, v_n+w_n) \in \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$

Scalar multiplication



$\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$

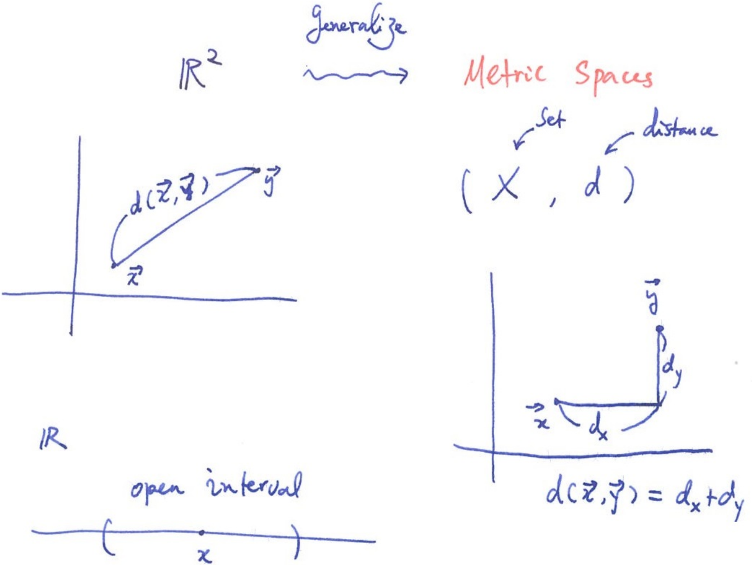
$\vec{v} = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$

$c \in \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

$c\vec{v} = (cv_1, \cdots, cv_n) \in \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$

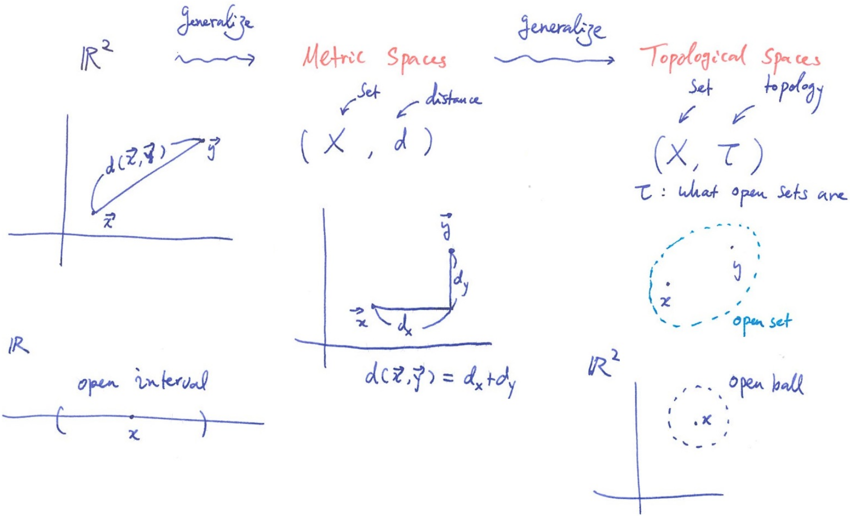
Interlude: Topological spaces

A metric space is a set endowed with the notion of “distance”.



Interlude: Topological spaces

A topological space is a set endowed with the notion of “nearness”.

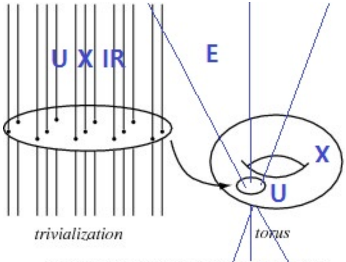


Definition of a vector bundle

Definition

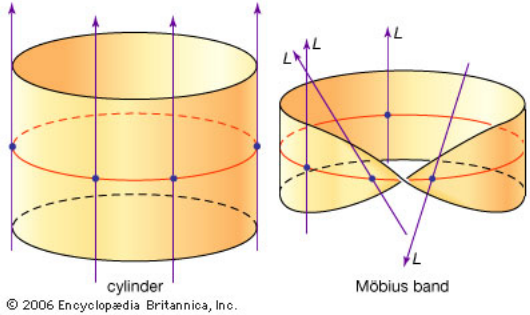
A toplogical real (resp. complex) **vector bundle** of rank n over a space X is a space E and a map $p : E \to X$ satisfying that

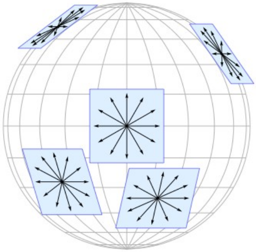
- For each $x \in X$, the inverse image $p^{-1}(x)$ is a n-dimensional real (resp. complex) vector space.
- For every $x \in X$, there is an open neighborhood U of x such that the map from $U \times \mathbb{R}^n$ (resp. $U \times \mathbb{C}^n$) to $p^{-1}(U)$ is a homeomorphism and fiberwise linear isomorphism.



trivialization of a line bundle on a torus

Examples of vector bundles




Tangent bundle on a 2-sphere

Definition of a bundle map

Definition

Let $p_E : E \to X$ and $p_F : F \to X$ be vector bundles over X. A **bundle map** is a continuous map $\varphi : E \to F$ which is fiberwise isomorphism and making the following diagram commutative.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_E"'] & & F \arrow[dl, "p_F"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Examples of categories (continued)

(6) **Spaces** the category of all "spaces"

Objects: All spaces († compact Hausdorff topological spaces)

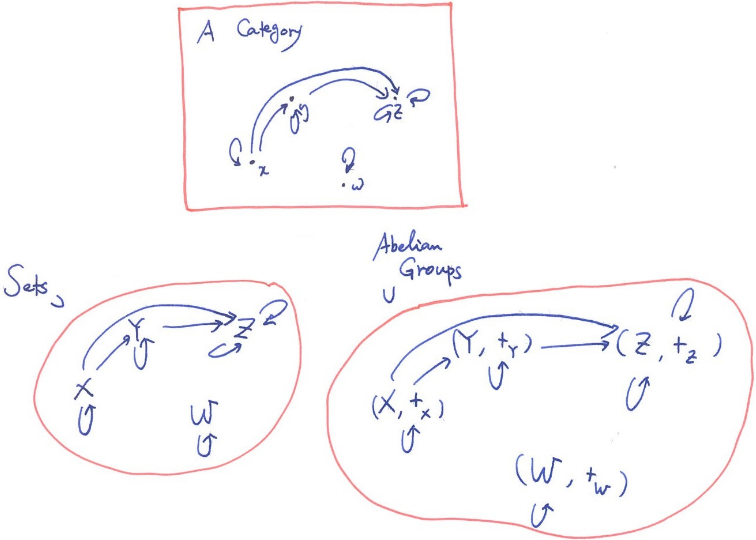
Morphisms: $\mathrm{Hom}(X, Y) =$ all continuous functions from X to Y, for any $X, Y \in$ **Spaces**.

(7) $\mathbf{Bun}_{\mathbb{C}}(X)$ the category of all complex vector bundles over X

Objects: All complex vector bundles over X.

Morphisms: $\mathrm{Hom}(E, F) =$ all bundle maps from E to F, for any $E, F \in \mathbf{Bun}_{\mathbb{C}}(X)$.

Functors: Motivation



Functors: Motivation

Definition of a functor

Definition

Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be categories. A **functor** F from $\mathcal{C}$ to $\mathcal{D}$ is an assignment that

- takes an object to an object; $\mathcal{C} \ni x \overset{F}{\mapsto} F(x) \in \mathcal{D}$.
- takes a morphism to a morphism; $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \ni f \overset{F}{\mapsto} F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y))$.

satisfying that

(1) $F(\mathbf{1}_x) = \mathbf{1}_{F(x)}$ for all $x \in \mathcal{C}$.

(2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ for any composable pair $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$.

Definition of a contravariant functor

Definition

Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be categories. A contravariant **functor** F from $\mathcal{C}$ to $\mathcal{D}$ is an assignment that

- takes an object to an object; $\mathcal{C} \ni x \overset{F}{\mapsto} F(x) \in \mathcal{D}$.
- takes a morphism to a morphism;
  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \ni f \overset{F}{\mapsto} F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(y), F(x))$.

satisfying that

(1) $F(\mathbf{1}_x) = \mathbf{1}_{F(x)}$ for all $x \in \mathcal{C}$.

(2) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ for any composable pair $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$.

Examples of functors

(1) † Taking isomorphism classes

$$\begin{aligned} \mathtt{isom} : \text{“}\mathbf{Cat}\text{''} &\longrightarrow \mathbf{Sets} \\ \mathcal{C} &\mapsto \mathtt{isom}(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

(2) Group completion / Inclusion

$$K : \mathbf{CMon} \underset{\text{inclusion}}{\overset{\text{Group compl.}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ab} : \mathtt{Incl}$$

Construction For any $(M, +) \in \mathbf{CMon}$,
$K(M, +) = (M \times M)/\triangle M$, where $\triangle M = \{(m, m) : m \in M\}$.

Examples of functors

(3) Topological K-theory

$$\begin{aligned} K^0 : \mathbf{Spaces}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ X &\mapsto K^0(X) \end{aligned}$$

Construction $K^0(X) = K\big(\mathtt{isom}(\mathbf{Bun}_{\mathbb{C}}(X)), \oplus\big)$
$\oplus$: the direct sum of vector bundles.

(4) † Homotopy classes of maps into a space $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} [-, \mathcal{F}] : \mathbf{Spaces}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets} \\ X &\mapsto [X, \mathcal{F}] := \pi_0 \mathrm{Map}(X, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Interude: Some operator theory †

Let $\mathcal{H}$ be the infinite dimensional separable complex Hilbert space. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denotes the space of bounded operators on $\mathcal{H}$.

Definition

$\mathrm{Fred}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \dim(\ker T) < \infty \text{ and } \dim(\mathrm{coker}\, T) < \infty\}$

Proposition

$\mathrm{Fred}(\mathcal{H})_{\mathrm{norm}}$ has a homotopy commutative and homotopy associative H-space structure.

Corollary

$\pi_0 \mathrm{Map}(X, \mathrm{Fred}(\mathcal{H})) \in \mathbf{Ab}$.

Natural transformations

Definition

Let $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ be functors. A **natural transformation** $\eta : F \Rightarrow G$ is an assignment $\eta_X : F(X) \to G(X)$ for all $X \in \mathcal{C}$ making the following diagram commutative.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

A natural transformation η is called a **natural isomorphism** if η_X is invertible for every $X \in \mathcal{C}$.

The Atiyah-Jänich theorem

Theorem (Atiyah (1964), Jänich (1964))

There is a natural isomorphism

$$\mathrm{Index} : K^0(-) \Rightarrow [-, \mathrm{Fred}(\mathcal{H})]$$

of functors from $\mathbf{Spaces}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$.

Remark

It **establishes a bridge** between topology and analysis.

Sketch of Atiyah's construction †

How do we get a map?

$T \in Map(X, Fred(\mathcal{H}))$

X: compact

$$V := \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{(\ker T(x_i))^{\perp}}_{\text{Has fin. codim}}}_{\text{Still has a fin. codim}}$$

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{x_i}$$

$X \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}/T(x)(V)$ topologize $\mathcal{H}/T(x)(V)$ using quotient top. $\overset{\text{denote}}{=} \mathcal{H}/TV$

Prop: $\mathcal{H}/TV$ is a vector bundle over X.

Construction: $T \in Map(X, Fred(\mathcal{H})) \overset{\text{Index}}{\rightsquigarrow} [\mathcal{H}/TV] - [\mathcal{H}/V]$

This map is well-defined, homotopy invariant, 1-1 (by Kuiper's thm), and onto.

Fredholm section definition of twisted K-theory †

Definition

Let $P \in \mathbf{Bun}_{PU(\mathcal{H})}(X)$, and ρ the representation of $PU(\mathcal{H})$ on $\mathrm{Fred}(\mathcal{H})$. The P-**twisted** K-**theory** is

$$K^0(X; P) := \pi_0 \mathrm{Section}(X, P \times_\rho \mathrm{Fred}(\mathcal{H}))$$

Twisted vector bundles †

Definition (Karoubi, Bouwknegt et al (BCMMS), Waldorf, ...)

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ be an open cover of X

λ: a $U(1)$-valued completely normalized Čech 2-cocycle.

A λ-**twisted vector bundle** E over X:

A family of product bundles $\{U_i \times \mathbb{C}^n : U_i \in \mathcal{U}\}_{i \in \Lambda}$

Transition maps

$$g_{ji} : U_{ij} \to U(n)$$

satisfying

$$g_{ii} = \mathbf{1}, \quad g_{ji} = g_{ij}^{-1}, \quad g_{kj} g_{ji} = g_{ki} \lambda_{kji}.$$

Twisted K-group †

Definition (Karoubi, Bouwknegt et al (BCMMS), ...)

The **twisted K-theory** of X defined on an open cover $\mathcal{U}$ with a $U(1)$-gerbe twisting λ.

$$K^0(\mathcal{U}, \lambda) := K(\mathtt{isom}(\mathbf{Bun}(\mathcal{U}, \lambda), \oplus)).$$

By taking colimit along refinements of open cover,

$$K^0(X, \mathrm{colim}\lambda) := \mathrm{colim} K^0(\mathcal{U}, \lambda).$$

Twisted Atiyah-Jänich theorem (In progress) †

Let $P \in \mathbf{Bun}_{PU(\mathcal{H})}(X)$ and the Diximier-Douady class $DD(P)$ represents a torsion class in $H^3(X;\mathbb{Z})$. There is a natural isomorphism

$$\mathrm{Index} : K^0(-;P)_{\mathrm{Fred}} \Rightarrow K^0(-;\lambda_P)_{\mathrm{tw.v.b.}}$$

of functors from $\mathbf{Spaces}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$.

Vielen Dank!