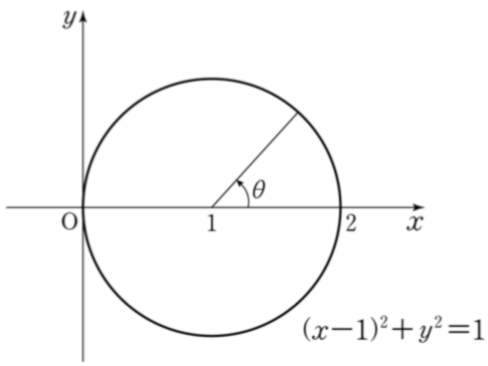
Homework 7 – 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험 기출 및 유사문제
Fall 2021, Differential Geometry II

[2017-B5] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 γ를 두 곡면

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 4, z > 0\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2+y^2 = 1, z > 0\}$$

의 교선이라 하자. 아래 그림에서의 각 θ $(0 < \theta < 2\pi)$를 매개변수로 하는 곡선 $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$의 매개변수표현 (parametrized representation) $\gamma(\theta)$를 하나 구하시오. 또한 곡면 S_1위에 놓인 곡선으로서 γ의 점 $(0,0,2)$에서의 측지곡률(geodesic curvature)의 절댓값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]



[2014-A12] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면

$$M : X(u,v)\left(u\cos v, u\sin v, \frac{1}{2}u^2\right) \quad (u \ge 0, 0 \le v \le 2\pi)$$

에 포함되는 영역 $S = \{X(u,v) | 0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi\}$가 있다. S의 경계(boundary) ∂S의 측지곡률을 κ_g라 할 때, ∂S의 측지곡률합(전측지곡률, total geodesic curvature) $\int_{\partial S} \kappa_g ds$의 절댓값을 구하시오. (단, s는 호의 길이를 나타내는 매개변수이다.) [2점]

⊙ 도움말
정칙곡선(정규곡선, regular curve) α_1, α_2, $\cdots$, α_n들로 이루어진 조각별 정칙곡선(piecewise regular curve) α의 측지곡률합은 $\int_\alpha \kappa_g ds = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} \kappa_g ds$로 정의된다.

참고: 2014-A12 문제는 가우스곡률을 곡면상에서 적분한 다음 Gauss-Bonnet formula를 이용하여 구할 수도 있습니다. 이 역시 좋은 연습문제이니 두 가지 풀이를 함께 익혀 두시기 바랍니다.

[2009-36] 다음은 3차원 유클리드 공간에 놓인 곡면

$$M : x(u,v) = (u, v, u^3 + 2v), \quad -\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty$$

위의 측지삼각형(geodesic triangle)의 내각의 합을 구하는 과정이다. (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것은?

곡면 M은 yz평면 위의 직선 $l_o : x = 0,\ z = 2y$를 xz위의 곡선 $C : y = 0,$ $\boxed{\text{(가)}}$을 따라 평행이동시킴으로써 얻어진다. 곡면 M의 각 점 p에 대하여 p를 지나면서 l_o와 평행인 직선을 단위속력을 갖도록 매개화한 곡선을 $l_p = l_p(t)$라 하면, l_p는 M의 점근곡선이고, 동시에 $\boxed{\text{(나)}}$이 된다. 따라서 모든 점에서 M의 가우스곡률(Gaussian curvature) K는 $\boxed{\text{(다)}}$를 만족한다. 곡면 M의 임의의 측지삼각형 $\triangle$에 대하여 가우스-보네(Gauss-Bonnet)의 공식을 적용하면

$$\iint_\triangle K dA = (\triangle\text{의 내각의 합}) - \pi$$

이므로, 곡면 M의 모든 측지삼각형의 내각의 합은 $\boxed{\text{(라)}}$.

⟨도움말⟩
- 점근곡선(asymptotic curve): 곡선 위의 각 점에서 접선 방향의 법곡률(normal curvature)이 0이 되는 곡면위의 정칙곡선
- 주요곡선(principal curve): 곡선 위의 각 점에서 접선 방향의 법곡률이 주요곡률(principal curvature)이 되는 곡면 위의 정칙곡선
- 측지선(geodesic): 곡선 위의 각 점에서 측지곡률(geodesic curvature)이 0이고, 일정한 속력을 갖는 곡면 위의 정칙곡선

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	$z = x^3$	측지선	$K \geq 0$	π보다 작다.
②	$z = x^{\frac{1}{3}}$	주요곡선	$K = 0$	π이다.
③	$z = x^{\frac{1}{3}}$	측지선	$K \leq 0$	π보다 작다.
④	$z = x^3$	주요곡선	$K \leq 0$	π보다 작다.
⑤	$z = x^3$	주요곡선	$K = 0$	π이다.

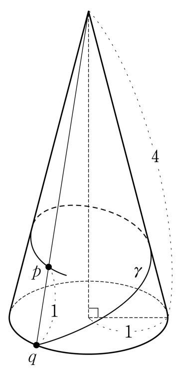
[2010-20] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡면

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 - x^2 - y^2 = 2\} P \quad = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2\}$$

의 교선을 α라 하자. 이때 곡면 S위에 놓인 곡선으로서 α의 측지곡률(geodesic curvature)의 절댓값은?

① 0 ② $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

[2016-B5] 그림과 같이 3차원 유클리드 공간에 밑면이 반지름의 길이가 1인 원이고 모선의 길이가 4인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 옆면에 있는 점 p와 밑면에 있는 점 q는 같은 모선 위에 있고, 선분 pq의 길이는 1이다. 점 q에서 출발하여 원뿔의 옆면을 돌아 점 p를 지나는 측지선(geodesic) γ에 대하여, 점 p에서 원뿔의 옆면의 주곡률(principal curvature)을 각각 κ_1,κ2라 하고, 점 p에서 측지선 γ의 곡률(curvature)을 κ라 하자. κ_1,κ2의 값을 구하고, 이를 이용하여 κ의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]



[2018정현민5회B5] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 두 곡면

$$S_1 : z = xy, \quad S_2 : z = ax^2 + by^2$$

사이에 등장사상(isometry) $F : S_1 \to S_2$가 존재한다고 할 때, 실수 a, b의 곱 ab의 값을 풀이과정과 함께 쓰시오. [4점]

[2018정현민2회B4] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 α 를 두 곡면 $S : X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$와 $T : x^2 + y^2 = 1$의 교선이라 하자. α의 호장에 관한 표현 (arc length representation)을 구하고, α 위의 임의의 점에서 곡면 S에서의 측지곡률 (geodesic curvature)의 절댓값을 풀이과정과 함께 쓰시오. [4점]