

Handout 1 – 곡면의 국소적이론 관련 기출문제

Fall 2022, Differential Geometry II

1. [2022-B2] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에 놓인 곡면 M 위의 점 \mathbf{p} 에서 모든 접벡터(tangent vector)의 집합을 $T_p(M)$, \mathbf{p} 에서의 주벡터(principal vector) 중 하나를 \mathbf{e} 라 하자. $T_p(M)$ 에 속하는 단위접벡터(unit tangent vector) v 와 \mathbf{e} 의 사잇각을 θ 라 할 때, \mathbf{p} 에서 \mathbf{v} 방향으로의 법곡률(normal curvature) $\kappa_n(\theta)$ 가

$$\int_0^\pi \kappa_n(\theta) d\theta = \frac{11\pi}{8}$$

를 만족한다고 하자. 점 \mathbf{p} 에서 곡면 M 의 가우스곡률(Gaussian curvature)이 $\frac{3}{2}$ 일 때, \mathbf{p} 에서 M 의 주곡률(principal curvature)의 값을 모두 쓰시오. (단, 주벡터는 주곡률방향(주방향, principal direction)의 단위접벡터이다.) [2점]

2. [2020-B8] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 곡면 $\mathbf{x}(u, v) = (u^2 + v, u - v^2, uv)$ 위의 $u = 1, v = 2$ 인 점 P 에서의 접평면(tangent plane)의 방정식을 구하시오. 또한 점 P 에서 곡면 \mathbf{x} 의 평균곡률(mean curvature) H 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

3. [2019-B5] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 곡면 $M : z = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$ 과 평면 $H : x + y - z = d$ 가 한 점 p 에서 접할 때, 상수 d 의 값을 구하시오. 또한 점 p 에서 곡면 M 의 가우스곡률 (Gaussian curvature) K 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

4. [2018-B5] 곡면

$$X(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, \frac{1}{u} \right) \quad (u > 0, -\pi < v < \pi)$$

위의 점 $p = (1, 0, 1)$ 에서 주곡률(principal curvature) k_1, k_2 ($k_1 > k_2$)의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 점 p 에서 단위접벡터(unit tangent vector) $w = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ 방향으로의 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

5. [2015-B3] 곡면

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x = (y^2 + z^2)^2\}$$

위의 점 $p = (\frac{1}{4}u^4, u, 0)$ ($u > 0$)에서의 접평면(tangent plane)을

$$T_p(M) = \{\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v}_p \text{는 } p \text{에서의 곡면 } M \text{의 접벡터}\}$$

라 하고 이 점에서의 주곡률(principal curvature)을 각각 $k_1(u)$, $k_2(u)$ 라 하자. 또, $T_p(M)$ 에 속하는 두 개의 단위접벡터(unit tangent vector) \mathbf{w}_p 와 $(0, 0, 1)_p$ 가 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$ 라고 하자. 점 p 에서 곡면 M 의 가우스 곡률 $K(u)$ 를 풀이 과정과 함께 쓰고, \mathbf{w}_p 방향으로의 법곡률(normal curvature) $k(\mathbf{w}_p)$ 를 $ak_1(u) + bk_2(u)$ (a, b 는 상수)로 나타낼 때 ab 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점]

6. [2013-34] 좌표공간에 원환면(torus)

$$T = \{(x, y, z) | (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

과 평면

$$P = \{(x, y, z) | y + z = 0\}$$

이 있다. 원환면 T 와 평면 P 의 교집합에 놓여 있는 단위속력 곡선 $\alpha : (-1, 1) \rightarrow T \cap P$ 가 $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ 을 만족시킬 때, 점 $(1, 0, 0)$ 에서 곡선 α 의 원환면 T 에 대한 법곡률(normal curvature)의 절댓값은? [2점]

- ① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

7. [2008-17] \mathbb{R} 을 실수 집합이라 할 때, 곡면 $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2 \right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [4점]

- (1) 곡면 위의 점 $\mathbf{x}(1, 1)$ 에서의 법벡터(normal vector) \vec{n} 을 구하시오.
 (2) 위 (1)에서 구한 법벡터 \vec{n} 과 \vec{i} 을 xy -평면에 정사영(projection)한 벡터가 이루는 각을 α 라 할 때, $\cos \alpha$ 를 구하시오.

8. [2010-19]. 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 곡선 γ 를 두 곡면

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$$

의 교선이라 하자. 이때 γ 위의 점 $q = (1, 0, 0)$ 에서의 γ 의 접선벡터와 수직이고 점 q 를 포함하는 평면에 속하는 점은? [2점]

- ① $(0, 1, 1)$ ② $(1, 0, 1)$ ③ $(1, 1, 1)$ ④ $(1, -1, -1)$ ⑤ $(-1, 1, -1)$