

**Handout 1 – 곡면의 국소적이론 관련 기출문제**  
**Fall 2023, Differential Geometry II**

1. [2022-B2] 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에 놓인 곡면  $M$  위의 점  $\mathbf{p}$ 에서 모든 접벡터(tangent vector)의 집합을  $T_p(M)$ ,  $\mathbf{p}$ 에서의 주벡터(principal vector) 중 하나를  $\mathbf{e}$ 라 하자.  $T_p(M)$ 에 속하는 단위접벡터(unit tangent vector)  $v$ 와  $\mathbf{e}$ 의 사잇각을  $\theta$ 라 할 때,  $\mathbf{p}$ 에서  $\mathbf{v}$  방향으로의 법곡률(normal curvature)  $\kappa_n(\theta)$ 가

$$\int_0^\pi \kappa_n(\theta) d\theta = \frac{11\pi}{8}$$

를 만족한다고 하자. 점  $\mathbf{p}$ 에서 곡면  $M$ 의 가우스곡률(Gaussian curvature)이  $\frac{3}{2}$ 일 때,  $\mathbf{p}$ 에서  $M$ 의 주곡률(principal curvature)의 값을 모두 쓰시오. (단, 주벡터는 주곡률방향(주방향, principal direction)의 단위접벡터이다.) [2점]

2. [2020-B8] 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 곡면  $\mathbf{x}(u, v) = (u^2 + v, u - v^2, uv)$  위의  $u = 1, v = 2$ 인 점  $P$ 에서의 접평면(tangent plane)의 방정식을 구하시오. 또한 점  $P$ 에서 곡면  $\mathbf{x}$ 의 평균곡률(mean curvature)  $H$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

3. [2019-B5] 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 곡면  $M : z = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$ 과 평면  $H : x + y - z = d$ 가 한 점  $p$ 에서 접할 때, 상수  $d$ 의 값을 구하시오. 또한 점  $p$ 에서 곡면  $M$ 의 가우스곡률 (Gaussian curvature)  $K$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

4. [2018-B5] 곡면

$$X(u, v) = \left( u \cos v, u \sin v, \frac{1}{u} \right) \quad (u > 0, -\pi < v < \pi)$$

위의 점  $p = (1, 0, 1)$ 에서 주곡률(principal curvature)  $k_1, k_2$  ( $k_1 > k_2$ )의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 점  $p$ 에서 단위접벡터(unit tangent vector)  $w = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$  방향으로의 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

5. [2015-B3] 곡면

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x = (y^2 + z^2)^2\}$$

위의 점  $p = (\frac{1}{4}u^4, u, 0)$  ( $u > 0$ )에서의 접평면(tangent plane)을

$$T_p(M) = \{\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v}_p \text{는 } p \text{에서의 곡면 } M \text{의 접벡터}\}$$

라 하고 이 점에서의 주곡률(principal curvature)을 각각  $k_1(u)$ ,  $k_2(u)$ 라 하자. 또,  $T_p(M)$ 에 속하는 두 개의 단위접벡터(unit tangent vector)  $\mathbf{w}_p$ 와  $(0, 0, 1)_p$ 가 이루는 각이  $\frac{\pi}{6}$ 라고 하자. 점  $p$ 에서 곡면  $M$ 의 가우스 곡률  $K(u)$ 를 풀이 과정과 함께 쓰고,  $\mathbf{w}_p$ 방향으로의 법곡률(normal curvature)  $k(\mathbf{w}_p)$ 를  $ak_1(u) + bk_2(u)$  ( $a, b$ 는 상수)로 나타낼 때  $ab$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점]

6. [2013-34] 좌표공간에 원환면(torus)

$$T = \{(x, y, z) | (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

과 평면

$$P = \{(x, y, z) | y + z = 0\}$$

이 있다. 원환면  $T$ 와 평면  $P$ 의 교집합에 놓여 있는 단위속력 곡선  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow T \cap P$ 가  $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ 을 만족시킬 때, 점  $(1, 0, 0)$ 에서 곡선  $\alpha$ 의 원환면  $T$ 에 대한 법곡률(normal curvature)의 절댓값은? [2점]

- ① 0      ②  $\frac{1}{3}$       ③  $\frac{2}{3}$       ④ 1      ⑤  $\frac{4}{3}$

7. [2008-17]  $\mathbb{R}$ 을 실수 집합이라 할 때, 곡면  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2 \right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [4점]

- (1) 곡면 위의 점  $\mathbf{x}(1, 1)$ 에서의 법벡터(normal vector)  $\vec{n}$ 을 구하시오.  
 (2) 위 (1)에서 구한 법벡터  $\vec{n}$ 과  $\vec{i}$ 을  $xy$ -평면에 정사영(projection)한 벡터가 이루는 각을  $\alpha$ 라 할 때,  $\cos \alpha$ 를 구하시오.

8. [2010-19]. 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 곡선  $\gamma$ 를 두 곡면

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$$

의 교선이라 하자. 이때  $\gamma$  위의 점  $q = (1, 0, 0)$ 에서의  $\gamma$ 의 접선벡터와 수직이고 점  $q$ 를 포함하는 평면에 속하는 점은? [2점]

- ①  $(0, 1, 1)$       ②  $(1, 0, 1)$       ③  $(1, 1, 1)$       ④  $(1, -1, -1)$       ⑤  $(-1, 1, -1)$