Handout 1 – 곡면의 국소적이론 관련 기출문제
Fall 2024, Differential Geometry II

1. [2022-B2] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면 M 위의 점 $\mathbf{p}$에서 모든 접벡터(tangent vector)의 집합을$T_p(M)$, $\mathbf{p}$에서의 주벡터(principal vector) 중 하나를 $\mathbf{e}$라 하자. $T_p(M)$에 속하는 단위접벡터(unit tangent vector) v와 $\mathbf{e}$의 사잇각을 θ라 할 때, $\mathbf{p}$에서 $\mathbf{v}$ 방향으로의 법곡률(normal curvature) $\kappa_n(\theta)$가

$$\int_0^\pi \kappa_n(\theta)d\theta = \frac{11\pi}{8}$$

를 만족한다고 하자. 점 $\mathbf{p}$에서 곡면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature)이 $\frac{3}{2}$일 때, $\mathbf{p}$에서 M의 주곡률(principal curvature)의 값을 모두 쓰시오. (단, 주벡터는 주곡률방향(주방향, principal direction)의 단위접벡터이다.) [2점]

2. [2020-B8] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면 $\mathbf{x}(u,v) = (u^2+v, u-v^2, uv)$ 위의 $u=1, \quad v=2$인 점 P에서의 접평면(tangent plane)의 방정식을 구하시오. 또한 점 P 에서 곡면 $\mathbf{x}$의 평균곡률(mean curvature) H의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

3. [2019-B5] 3차원 유클리드 공간 R^3에서 곡면 $M : z = \frac{1}{4}(x^4+y^4)$과 평면 $H : x+y-z=d$가 한 점 p에서 접할 때, 상수 d의 값을 구하시오. 또한 접점 p에서 곡면 M의 가우스곡률 (Gaussian curvature) K의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

4. [2018-B5] 곡면

$$X(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, \frac{1}{u}\right) \quad (u>0, -\pi<v<\pi)$$

위의 점 $p=(1,0,1)$에서 주곡률(principal curvature) k_1, k_2 $(k_1 > k_2)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 점 p 에서 단위접벡터(unit tangent vector) $w = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$방향으로의 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

5. [2015-B3] 곡면

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 4x = (y^2+z^2)^2\}$$

위의 점 $p = \left(\frac{1}{4}u^4, u, 0\right) \quad (u>0)$에서의 접평면(tangent plane)을

$$T_p(M) = \{\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{v}_p\text{는 p에서의 곡면 } M\text{의 접벡터}\}$$

라 하고 이 점에서의 주곡률(principal curvature)을 각각 $k_1(u)$, $k_2(u)$라 하자. 또, $T_p(M)$에 속하는 두 개의 단위접벡터(unit tangent vector) $\mathbf{w}_p$와 $(0,0,1)_p$가 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$라고 하자. 점 p에서 곡면 M 의 가우스 곡률 $K(u)$를 풀이 과정과 함께 쓰고, $\mathbf{w}_p$방향으로의 법곡률(normal curvature) $k(\mathbf{w}_p)$를 $ak_1(u)+bk_2(u)$ (a,b는 상수)로 나타낼 때 ab의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점]

6. [2013-34] 좌표공간에 원환면(torus)

$$T=\{(x,y,z)|(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\}$$

과 평면

$$P=\{(x,y,z)|y+z=0\}$$

이 있다. 원환면 T와 평면 P의 교집합에 놓여 있는 단위속력 곡선 $\alpha:(-1,1)\to T\cap P$가 $\alpha(0)=(1,0,0)$을 만족시킬 때, 점 $(1,0,0)$에서 곡선 α의 원환면 T에 대한 법곡률(normal curvature)의 절댓값은? [2점]

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

7. [2008-17] $\mathbb{R}$을 실수 집합이라 할 때, 곡면 $\mathbf{x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2, v-\frac{v^3}{3}+u^2v, u^2-v^2\right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [4점]
(1) 곡면 위의 점 $\mathbf{x}(1,1)$ 에서의 법벡터(normal vector) $\overrightarrow{n}$ 을 구하시오.
(2) 위 (1)에서 구한 법벡터 $\overrightarrow{n}$ 과 $\overrightarrow{n}$ 을 xy-평면에 정사영(projection)한 벡터가 이루는 각을 α라 할 때, $\cos\alpha$를 구하시오.

8. [2010-19]. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 곡선 γ를 두 곡면

$$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2-y^2=1, x>0\},$$
$$S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=xy\}$$

의 교선이라 하자. 이때 γ위의 점 $q=(1,0,0)$에서의 γ의 접선벡터와 수직이고 점 q를 포함하는 평면에 속하는 점은? [2점]

① $(0,1,1)$ ② $(1,0,1)$ ③ $(1,1,1)$ ④ $(1,-1,-1)$ ⑤ $(-1,1,-1)$