Handout 2 – 곡면의 대역적이론 관련 기출문제

Fall 2024, Differential Geometry II

1. [2024-B7] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면

$$M : x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4, \quad 0 < x < \frac{4\sqrt{5}}{5}, \quad 0 < z < \sqrt{3}y$$

위의 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 가우스곡률(Gaussian curvature) K 를 구하시오. 또한, 곡면 M 에서의 가우스 곡률합(가우스 전곡률, total Gaussian curvature) $\iint_M KdA$ 를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, dA 는 곡면 M 의 면적소(area element)이다.) [4점]

2. [2023-B9] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡면 M, N을

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - y^2 - z = 0\},$$
$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 1\}$$

이라 하고, 곡선 γ를 M과 N의 교선이라 하자. 곡면 M에 놓인 곡선으로서 γ의 점 $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$에서의 측지곡률(geodesic curvature)과 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

3. [2021-B10] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선

$$\gamma(u) = (0, u^4 - 2u^2 + 5, u) \quad (u \in \mathbb{R})$$

를 z축을 중심으로 $360°$회전시켜 얻은 회전체를 M이라 하고, M의 가우스 곡률(Gaussian curvature)을 K라 하자. 영역

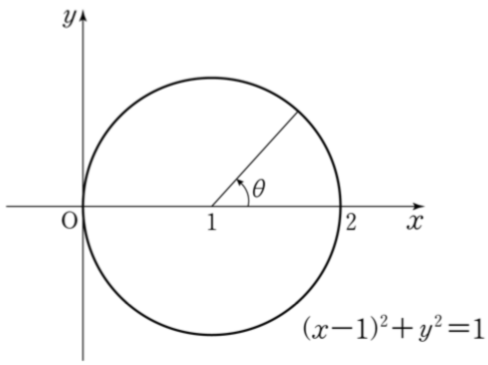
$$S = \{(x, y, z) \in M : -1 \leq z \leq 1\},$$

에 대하여 $\iint_S KdA$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

4. [2017-B5] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 γ를 두 곡면

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x - 1)^2 + y^2 = 1, z > 0\}$$

의 교선이라 하자. 아래 그림에서의 각 θ $(0 < \theta < 2\pi)$를 매개변수로 하는 곡선 $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$의 매개변수표현 (parametrized representation) $\gamma(\theta)$를 하나 구하시오. 또한 곡면 S_1위에 놓인 곡선으로서 γ의 점 $(0, 0, 2)$에서의 측지곡률(geodesic curvature)의 절댓값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]



5. [1997-7] 토러스(torus) $S^1 \times S^1$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature) K에 대하여 $K(p) = 0$이 되는 점 $p \in S^1 \times S^1$가 적어도 하나 존재함을 증명하시오. [4점]

6. [2014-A12] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면

$$M : X(u,v) \left(u\cos v, u\sin v, \frac{1}{2}u^2 \right) \quad (u \geq 0, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

에 포함되는 영역 $S = \{X(u,v) | 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi\}$가 있다. S의 경계(boundary) ∂S의 측지곡률을 κ_g라 할 때, ∂S의 측지곡률합(전측지곡률, total geodesic curvature) $\int_{\partial S} \kappa_g ds$의 절댓값을 구하시오. (단, s는 호의 길이를 나타내는 매개변수이다.) [2점]

◎ 도움말 정칙곡선(정규곡선, regular curve) α_1, α_2, $\cdots$, α_n들로 이루어진 조각별 정칙곡선(piecewise regular curve) α의 측지곡률합은 $\int_\alpha \kappa_g ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i} \kappa_g ds$로 정의된다.

참고: 2014-A12 문제는 가우스곡률을 곡면상에서 적분한 다음 Gauss-Bonnet formula를 이용하여 구할 수도 있습니다. 이 역시 좋은 연습문제이니 두 가지 풀이를 함께 익혀 두시기 바랍니다.

7. [2009-36] 다음은 3차원 유클리드 공간에 놓인 곡면

$$M : x(u,v) = (u, v, u^3 + 2v), \quad -\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty$$

위의 측지삼각형(geodesic triangle)의 내각의 합을 구하는 과정이다. (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것은?

곡면 M은 yz평면 위의 직선 $l_o : x = 0,\ z = 2y$를 xz위의 곡선 $C : y = 0$, $\boxed{(가)}$을 따라 평행이동시킴으로써 얻어진다. 곡면 M의 각 점 p에 대하여 p를 지나면서 l_o와 평행인 직선을 단위속력을 갖도록 매개화한 곡선을 $l_p = l_p(t)$라 하면, l_p는 M의 점근곡선이고, 동시에 $\boxed{(나)}$이 된다. 따라서 모든 점에서 M의 가우스곡률(Gaussian curvature) K는 $\boxed{(다)}$를 만족한다. 곡면 M의 임의의 측지삼각형 $\triangle$에 대하여 가우스-보네(Gauss-Bonnet)의 공식을 적용하면

$$\iint_{\triangle} K dA = (\triangle\text{의 내각의 합}) - \pi$$

이므로, 곡면 M의 모든 측지삼각형의 내각의 합은 $\boxed{(라)}$.

⟨도움말⟩

• 점근곡선(asymptotic curve): 곡선 위의 각 점에서 접선 방향의 법곡률(normal curvature)이 0이 되는 곡면위의 정칙곡선

• 주요곡선(principal curve): 곡선 위의 각 점에서 접선 방향의 법곡률이 주요곡률(principal curvature)이 되는 곡면 위의 정칙곡선

• 측지선(geodesic): 곡선 위의 각 점에서 측지곡률(geodesic curvature)이 0이고, 일정한 속력을 갖는 곡면 위의 정칙곡선

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	$z = x^3$	측지선	$K \geq 0$	π보다 작다.
②	$z = x^{\frac{1}{3}}$	주요곡선	$K = 0$	π이다.
③	$z = x^{\frac{1}{3}}$	측지선	$K \leq 0$	π보다 작다.
④	$z = x^3$	주요곡선	$K \leq 0$	π보다 작다.
⑤	$z = x^3$	주요곡선	$K = 0$	π이다.

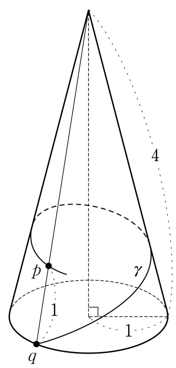
8. [2010-20] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡면

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 - x^2 - y^2 = 2\}P \quad = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2\}$$

의 교선을 α라 하자. 이때 곡면 S위에 놓인 곡선으로서 α의 측지곡률(geodesic curvature)의 절댓값은?

① 0 ② $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

9. [2016-B5] 그림과 같이 3차원 유클리드 공간에 밑면이 반지름의 길이가 1인 원이고 모선의 길이가 4인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 옆면에 있는 점 p와 밑면에 있는 점 q는 같은 모선 위에 있고, 선분 pq의 길이는 1이다. 점 q에서 출발하여 원뿔의 옆면을 돌아 점 p를 지나는 측지선(geodesic) γ에 대하여, 점 p에서 원뿔의 옆면의 주곡률(principal curvature)을 각각 κ_1,$\kappa 2$라 하고, 점 p에서 측지선 γ의 곡률(curvature)을 κ라 하자. κ_1,$\kappa 2$의 값을 구하고, 이를 이용하여 κ의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]



10. [2018정현민5회B5] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 두 곡면

$$S_1 : z = xy, \quad S_2 : z = ax^2 + by^2$$

사이에 등장사상(isometry) $F : S_1 \to S_2$가 존재한다고 할 때, 실수 a, b의 곱 ab의 값을 풀이과정과 함께 쓰시오. [4점]

11. 2차원 좌표평면상의 양의 값을 갖는 실함수 그래프를 x축을 중심으로 하여 회전하여 얻어진 회전면을 생각하자. 이때 회전면의 경선은 항상 측지선임을 보이시오. 회전면의 위선이 측지선이기 위한 필요충분조건을 찾으시오.