

**Homework 4 – 임용고시 기출문제(곡선론 최근 7개년)**  
**Spring 2022, Differential Geometry I**

[2022-A9] 단위속력곡선(unit speed curve)  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여 점  $\alpha(t)$ 에서의 곡률(curvature)과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각  $\kappa_\alpha(t)$ ,  $\tau_\alpha(t)$ 라 할 때,  $\kappa_\alpha(t) \neq 0$  ( $t \in \mathbb{R}$ )이고 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 는  $\tau_\alpha(t) = f(t)\kappa_\alpha(t)$ ,  $f(1) = \sqrt{3}$ ,  $f'(1) = -2$ 를 만족한다. 점  $\alpha(t)$ 에서 곡선  $\alpha$ 의 단위접벡터장(unit tangent vector field)  $T(t)$ 와 단위중법벡터장(unit binormal vector field)  $B(t)$ 에 대하여 곡선  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을

$$\beta(t) = \int_0^t \tau_\alpha(s)T(s) + \kappa_\alpha(s)B(s)ds$$

로 정의하고, 이 곡선 위의 점  $\beta(t)$ 에서의 곡률을  $\kappa_\beta(t)$ 라 하자. 이 때, 곡선  $\beta$ 가 정칙곡선(정규곡선, regular curve)임을 보이고,  $\tau_\alpha(1)\kappa_\beta(1)$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

[2021-A4] 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 구

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

위에 단위속력곡선(arc-length parametrized curve)  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  이 있다. 각  $s \in [0, 1]$ 에 대하여 점  $\gamma(s)$ 에서의  $\gamma$ 의 중법선벡터(binormal vector)를  $B(s)$ , 점  $\gamma(s)$ 에서의  $M$ 의 법선벡터(normal vector)를  $n(s)$ 라 하자. 모든  $s \in [0, 1]$ 에 대하여  $B(s) \cdot n(s) = \frac{1}{2}$ 을 만족할 때,  $\gamma(s)$ 의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)  $a(s)$ 와 곡률(curvature)  $b(s)$ 를 구하시오. [2점]

[2020-A3] 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 곡선

$$\gamma(t) = (2t - \cos t, t + \sin t, 2t + 1) \quad (0 < t < 2\pi)$$

위의 점  $\gamma(t_0)$ 에서의 접벡터(tangent vector)가 벡터  $(6, 2, 4)$ 와 평행하다.  $t_0$ 의 값과  $t = t_0$ 일 때 곡선  $\gamma$ 의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 구하시오. [2점]

[2019-A6] 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 곡선  $C$ 가

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^3 - ax + a, z = x - 1\}$$

일 때, 이 곡선의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)  $\tau$ 를 구하시오. 또한 점  $(1, 1, 0)$ 에서 곡선  $C$ 의 곡률(curvature)이 3이 되도록 하는  $a$ 의 값을 구하시오. (단,  $a$ 는 상수이다.) [2점]

[2018-A6] 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서  $\alpha(2) = (0, 0, 0)$ 인 단위속력곡선 (unit speed curve)  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여 곡선  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을

$$\beta(t) = \int_2^t (\alpha(s) + s^2 N(s)) ds$$

라 하자. 두 벡터  $\alpha'(2)$ ,  $\beta''(2)$ 가 서로 수직일 때,  $t = 2$ 에서  $\alpha$ 의 곡률(curvature)  $\kappa$ 의 값을 구하시오. (단,  $N(s)$ 는 곡선  $\alpha$ 의 주법벡터장(principal normal vector field)이다.) [2점]

[2017-A8] 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 의 한 평면에 있고 곡률(curvature)이 양인 단위속력곡선(unit speed curve)  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여, 점  $\gamma(s)$ 에서의 접선벡터 (tangent vector)를  $\vec{T}(s)$ , 주법선벡터를  $\vec{N}(s)$ 라 하자. 곡선  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을  $\beta(s) = \frac{1}{2}\vec{T}(s) + \vec{N}(s)$ 로 정의할 때, 모든 양수  $t$ 에 대하여  $s = 0$ 에서  $s = t$ 까지 곡선  $\beta$ 의 길이는  $3t$ 이다.  $s = 1$ 일 때, 곡선  $\gamma$ 의 곡률을 구하시오. [2점]

[2016-A6] 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 단위속력곡선 (unit speed curve)  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 의 점  $\gamma(s)$ 에서의 곡률 (curvature)  $\kappa(s)$ 는  $\sqrt{s^4 + 4s^2 + 3}$ 이다. 곡선  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을  $\alpha(t) = \gamma(t) + \gamma'(t)$ 로 정의할 때,  $t = 0$ 에서  $t = 1$ 까지 곡선  $\alpha$ 의 길이를 구하시오. [2점]