

Handout 1 – 임용고시 기출문제(곡선론 최근 9개년)
Spring 2024, Differential Geometry I

[2024-A4] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 곡선 C 를

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = e^{ax}, yz = b\} \quad (\text{단, } a, b \text{ 는 상수})$$

라 하자. 곡선 C 와 yz -평면의 교점 P 에서 곡선 C 의 접선 (tangent line)이 점 $(2\sqrt{2}, 3, -1)$ 을 지날 때, $a^2 + b^2$ 의 값과 점 P 에서의 곡률(curvature)을 순서대로 구하시오. [2점]

[2023-A3] 2차원 유클리드 평면에 곡선

$$\alpha(t) = (2 \sin t - \sin 2t, 2 \cos t - \cos 2t)$$

가 있다. 곡선 α 의 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서의 접촉원(osculating circle)의 중심(곡률중심, center of curvature)과 반지름(곡률반경, radius of curvature)을 구하시오. [2점]

[2022-A9] 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여 점 $\alpha(t)$ 에서의 곡률(curvature)과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 $\kappa_\alpha(t), \tau_\alpha(t)$ 라 할 때, $\kappa_\alpha(t) \neq 0$ ($t \in \mathbb{R}$)이고 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 는 $\tau_\alpha(t) = f(t)\kappa_\alpha(t)$, $f(1) = \sqrt{3}$, $f'(1) = -2$ 를 만족한다. 점 $\alpha(t)$ 에서 곡선 α 의 단위접벡터장(unit tangent vector field) $T(t)$ 와 단위종범벡터장(unit binormal vector field) $B(t)$ 에 대하여 곡선 $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을

$$\beta(t) = \int_0^t \tau_\alpha(s)T(s) + \kappa_\alpha(s)B(s)ds$$

로 정의하고, 이 곡선 위의 점 $\beta(t)$ 에서의 곡률을 $\kappa_\beta(t)$ 라 하자. 이 때, 곡선 β 가 정칙곡선(정규곡선, regular curve)임을 보이고, $\tau_\alpha(1)\kappa_\beta(1)$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

[2021-A4] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 구

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

위에 단위속력곡선(arc-length parametrized curve) $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ 이 있다. 각 $s \in [0, 1]$ 에 대하여 점 $\gamma(s)$ 에서의 γ 의 종범선벡터(binormal vector)를 $B(s)$, 점 $\gamma(s)$ 에서의 M 의 법선벡터(normal vector)를 $n(s)$ 라 하자. 모든 $s \in [0, 1]$ 에 대하여 $B(s) \cdot n(s) = \frac{1}{2}$ 을 만족할 때, $\gamma(s)$ 의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) $a(s)$ 와 곡률(curvature) $b(s)$ 를 구하시오. [2점]

[2020-A3] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 곡선

$$\gamma(t) = (2t - \cos t, t + \sin t, 2t + 1) \quad (0 < t < 2\pi)$$

위의 점 $\gamma(t_0)$ 에서의 접벡터(tangent vector)가 벡터 $(6, 2, 4)$ 와 평행하다. t_0 의 값과 $t = t_0$ 일 때 곡선 γ 의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 구하시오. [2점]

[2019-A6] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 곡선 C 가

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^3 - ax + a, z = x - 1\}$$

일 때, 이 곡선의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) τ 를 구하시오. 또한 점 $(1, 1, 0)$ 에서 곡선 C 의 곡률(curvature)이 3이 되도록 하는 a 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [2점]

[2018-A6] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 $\alpha(2) = (0, 0, 0)$ 인 단위속력곡선 (unit speed curve) $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여 곡선 $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을

$$\beta(t) = \int_2^t (\alpha(s) + s^2 N(s)) ds$$

라 하자. 두 벡터 $\alpha'(2)$, $\beta''(2)$ 가 서로 수직일 때, $t = 2$ 에서 α 의 곡률(curvature) κ 의 값을 구하시오. (단, $N(s)$ 는 곡선 α 의 주법벡터장(principal normal vector field)이다.) [2점]

[2017-A8] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 의 한 평면에 있고 곡률(curvature)이 양인 단위속력곡선(unit speed curve) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여, 점 $\gamma(s)$ 에서의 접선벡터 (tangent vector)를 $\vec{T}(s)$, 주법선벡터를 $\vec{N}(s)$ 라 하자. 곡선 $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을 $\beta(s) = \frac{1}{2}\vec{T}(s) + \vec{N}(s)$ 로 정의할 때, 모든 양수 t 에 대하여 $s = 0$ 에서 $s = t$ 까지 곡선 β 의 길이는 $3t$ 이다. $s = 1$ 일 때, 곡선 γ 의 곡률을 구하시오. [2점]

[2016-A6] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 단위속력곡선 (unit speed curve) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 의 점 $\gamma(s)$ 에서의 곡률 (curvature) $\kappa(s)$ 는 $\sqrt{s^4 + 4s^2 + 3}$ 이다. 곡선 $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을 $\alpha(t) = \gamma(t) + \gamma'(t)$ 로 정의할 때, $t = 0$ 에서 $t = 1$ 까지 곡선 α 의 길이를 구하시오. [2점]