Handout 1 – 임용고시 기출문제(곡선론 최근 10개년)
Spring 2025, Differential Geometry I

[2025-B2] 극방정식(polar equation) $r = 1 - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 로 주어진 평면곡선(plane curve)의 길이와 전곡률(total curvature)의 값을 순서대로 구하시오. (단, 곡선의 방향은 시계반대방향으로 주어져 있다.) [2점]

[2024-A4] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 곡선 C를

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = e^{ax}, yz = b\right\} \text{ (단, } a, b \text{ 는 상수)}$$

라 하자. 곡선 C 와 yz-평면의 교점 P 에서 곡선 C 의 접선 (tangent line)이 점 $(2\sqrt{2}, 3, -1)$ 을 지날 때, $a^2 + b^2$ 의 값과 점 P 에서의 곡률(curvature)을 순서대로 구하시오. [2점]

[2023-A3] 2차원 유클리드 평면에 곡선

$$\alpha(t) = (2\sin t - \sin 2t, 2\cos t - \cos 2t)$$

가 있다. 곡선 α의 $t = \frac{\pi}{2}$에서의 접촉원(osculating circle)의 중심(곡률중심, center of curvature)과 반지름(곡률반경, radius of curvature)을 구하시오. [2점]

[2022-A9] 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$에 대하여 점 $\alpha(t)$에서의 곡률(curvature)과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 $\kappa_\alpha(t)$, $\tau_\alpha(t)$라 할 때, $\kappa_\alpha(t) \neq 0$ $(t \in \mathbb{R})$이고 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 $\tau_\alpha(t) = f(t)\kappa_\alpha(t)$, $f(1) = \sqrt{3}$, $f'(1) = -2$를 만족한다. 점 $\alpha(t)$에서 곡선 α의 단위접벡터장(unit tangent vector field) $T(t)$와 단위종법벡터장(unit binormal vector field) $B(t)$에 대하여 곡선 $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을

$$\beta(t) = \int_0^t \tau_\alpha(s)T(s) + \kappa_\alpha(s)B(s)ds$$

로 정의하고, 이 곡선 위의 점 $\beta(t)$에서의 곡률을 $\kappa_\beta(t)$라 하자. 이 때, 곡선 β가 정칙곡선(정규곡선, regular curve)임을 보이고, $\tau_\alpha(1)\kappa_\beta(1)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

[2021-A4] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 구

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

위에 단위속력곡선(arc-length parametrized curve) γ: $[0,1] \to M$ 이 있다. 각 $s \in [0,1]$에 대하여 점 $\gamma(s)$에서의 γ 의 종법선벡터(binormal vector)를 $B(s)$, 점 $\gamma(s)$에서의 M의 법선벡터(normal vector)를 $n(s)$라 하자. 모든 $s \in [0,1]$에 대하여 $B(s) \cdot n(s) = \frac{1}{2}$을 만족할 때, $\gamma(s)$의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) $a(s)$와 곡률(curvature) $b(s)$를 구하시오. [2점]

[2020-A3] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선

$$\gamma(t) = (2t - \cos t, t + \sin t, 2t + 1) \quad (0 < t < 2\pi)$$

위의 점 $\gamma(t_0)$에서의 접벡터(tangent vector)가 벡터 $(6, 2, 4)$와 평행하다. t_0의 값과 $t = t_0$일 때 곡선 γ의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 구하시오. [2점]

[2019-A6] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 C가

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = x^3 - ax + a, z = x - 1\}$$

일 때, 이 곡선의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) τ를 구하시오. 또한 점 $(1, 1, 0)$에서 곡선 C의 곡률(curvature)이 3이 되도록 하는 a의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [2점]

[2018-A6] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 $\alpha(2) = (0, 0, 0)$인 단위속력곡선 (unit speed curve) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$에 대하여 곡선 $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을

$$\beta(t) = \int_2^t (\alpha(s) + s^2 N(s)) ds$$

라 하자. 두 벡터 $\alpha'(2)$, $\beta''(2)$가 서로 수직일 때, $t = 2$에서 α의 곡률(curvature) κ의 값을 구하시오. (단, $N(s)$는 곡선 α의 주법벡터장(principal normal vector field)이다.) [2점]

[2017-A8] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$의 한 평면에 있고 곡률(curvature)이 양인 단위속력곡선(unit speed curve) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$에 대하여, 점 $\gamma(s)$에서의 접선벡터 (tangent vector)를 $\vec{\mathbf{T}}(s)$, 주법선벡터를 $\vec{\mathbf{N}}(s)$라 하자. 곡선 $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을 $\beta(s) = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{T}}(s) + \vec{\mathbf{N}}(s)$로 정의할 때, 모든 양수 t에 대하여 $s = 0$에서 $s = t$까지 곡선 β의 길이는 $3t$이다. $s = 1$일 때, 곡선 γ의 곡률을 구하시오. [2점]

[2016-A6] 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 단위속력곡선 (unit speed curve) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$의 점 $\gamma(s)$에서의 곡률 (curvature) $\kappa(s)$는 $\sqrt{s^4 + 4s^2 + 3}$이다. 곡선 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을 $\alpha(t) = \gamma(t) + \gamma'(t)$로 정의할 때, $t = 0$에서 $t = 1$까지 곡선 α의 길이를 구하시오. [2점]